

UN MICROMUNDO PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA

Vanda Luengo
e-mail: Vanda.Luengo@imag.fr
tel : (+33) 76 51 42 45
fax : (+33) 76 51 45 55
EIAH, Laboratoire Leibniz, IMAG
B.P. 53, 38041 GRENOBLE CEDEX 9
FRANCE

RESUMEN

El objeto de esta investigación es diseñar e implementar a partir de Cabri-Géomètre (programa de construcción de figuras geométricas), los principios de un micromundo de prueba, permitiendo al estudiante la interacción con un agente racional, que él utilizará para expresar los conocimientos que desea aplicar para resolver el problema, para construir la prueba. La función del agente racional es de asegurar las retroacciones con respecto a la coherencia propia al razonamiento del estudiante y no a una concepción preestablecida de lo que debería ser la solución. El estudiante expresará su conocimiento a partir de enunciados a los cuales él podrá darle diferentes estatutos (conjetura, lema, hipótesis, teorema, etc.). La interacción entre el micromundo y el estudiante esta basado en el principio de aprendizaje colaborativo.

1. INTRODUCCIÓN

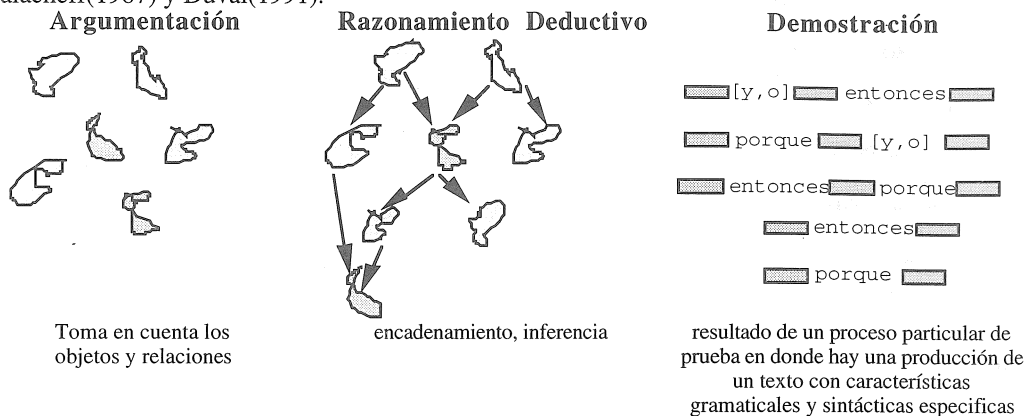
La demostración es un área de investigación bastante activa, tanto en didáctica, como en inteligencia artificial. Las investigaciones en didáctica han determinado la complejidad del problema desde el punto de vista de la enseñanza y aprendizaje de la demostración. Podemos distinguir cuatro aspectos de esta complejidad: la devolución de los estudiantes con respecto a la demostración (Brousseau, 1986), el contrato didáctico (Legrand 1990), la relación entre prueba y demostración (Balacheff 1987, Arsac 1988, Hanna 1993, Duval 1992), los aspectos cognitivos y lingüísticos de la demostración (Duval 1991). Las investigaciones en inteligencia artificial están esencialmente centradas sobre la concepción y realización de ambientes informáticos de aprendizaje humano, ya sea desde la perspectiva de desarrollar útiles de informática en relación a la modelización del conocimiento o del razonamiento, ya sea con la perspectiva de la implementación de una teoría de aprendizaje, un ejemplo representativo en esta área es los trabajos de J. R. Anderson en Carnegie-Mellon (Anderson y al. 1990), en Francia podemos citar los trabajos Py (1990) apoyándose en la teoría de reconocimiento de planes para el diagnóstico del trabajo del estudiante, los trabajos de Bazin (1993) con respecto a los meta conocimientos con respecto al análisis de una figura geométrica y finalmente Ferneda (1992) que modela un Agente Racional refutable en geometría.

Nuestro interés es pluridisciplinario en el sentido que nosotros tenemos como objetivo estudiar la problemática de la demostración desde el punto de vista didáctico, analizando algunas hipótesis del aprendizaje de la prueba, fundamentalmente la resolución de problemas como útil de aprendizaje de la demostración y la dialéctica de pruebas y refutaciones; y desde el punto de vista de la inteligencia artificial, implementando algunos aspectos tales como el aprendizaje colaborativo (collaborative learning), los modelos cognitivos y principalmente la teoría de micromundo.

2. MODELAR LA PRUEBA Y LA DEMOSTRACIÓN

Desde el punto de vista cognitivo podemos dividir la construcción de la demostración en 3 fases: Argumentación, razonamiento deductivo y demostración propiamente dicha. En la primera fase, llamada argumentación heurística, se realiza un razonamiento sobre la figura, se toman en cuenta objetos y relaciones de la figura que son particulares al problema. La segunda fase,

“Razonamiento Deductivo”, define el acto de relacionar cada una de las propiedades que se han inferido a partir de la figura y la organización de estas deducciones. y la tercera fase es el resultado de un proceso particular de prueba donde hay una producción de un texto con características gramaticales, semánticas y sintácticas particulares. Este modelo esta basado en los trabajos de Balacheff(1987) y Duval(1991).



Para nosotros las dos primeras fases definen el proceso de resolución de problemas para la construcción de la prueba, la tercera fase es consecuencia de un fenómeno social, ya que es una formalización preestablecida por la comunidad matemática para aceptar una prueba (Balacheff 1989). La construcción de la prueba (las dos primeras fases) es un proceso no secuencial, en el que se construyen conjeturas, estas pueden eventualmente ser refutadas (a través de un contraejemplo, de un enunciado contradictorio), reestructuradas o redefinidas, para finalmente llegar a la prueba. Este protocolo es definido como proceso de pruebas y refutaciones (Lakatos 1976, Balacheff 1987, Chazan 1993).

3. EL APRENDIZAJE COLABORATIVO Y LA TEORIA DE MICROMUNDO

En la ultima década el área de inteligencia artificial en educación se ha interesado en extender los campos de IA para soportar la enseñanza uno-a-uno, creando sistemas que soportan interacciones de tipo enseñanza-aprendizaje colaborativo. Más tarde y de manera independiente se ha investigado con respecto al análisis y al desarrollo de técnicas y modelos cooperativos para la resolución de problemas (Baker & Bielaczyc 1995). La idea principal del aprendizaje cooperativo es

que tanto el aprendiz como la computadora participan en la resolución de un problema. En esta interacción hay un proceso de adaptación por las dos partes para poder lograr los objetivos propios a cada participante.

Dentro de estas líneas de investigación se puede remarcar que la calidad de la colaboración depende fuertemente de cómo el verdadero aprendiz percibe su co-aprendiz (la computadora en nuestro caso). La interacción debe ser lo más transparente posible, la autenticidad de esta colaboración requiere que el co-aprendiz no esconda estrategias didácticas.

“ ITS is in contradiction to a discovery approach: on the one hand, we tell the student that he must acquire knowledge by himself, but on the other hand, this knowledge exist somewhere in an inspectable form ” (Dillenbourg,Self 1990).

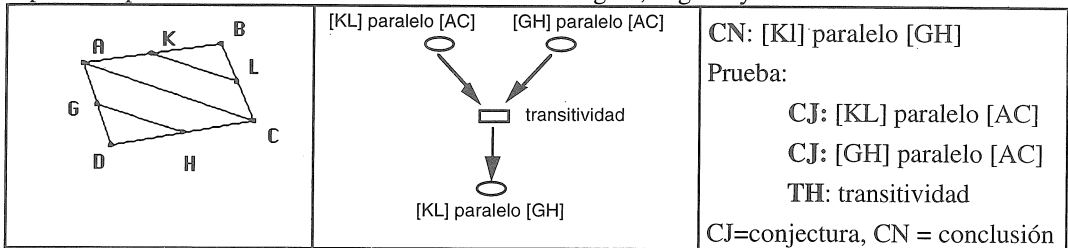
Una respuesta a la transparencia en la interacción sujeto-computadora es la teoría de micromundos. Un micromundo no impone un modelo, él no hace comparaciones con un modelo preestablecido (modelo didáctico o modelo del estudiante), el micromundo trabaja con respecto a una teoría o un subconjunto de la teoría. El micromundo es un lugar en donde el sujeto manipula un conjunto de objetos y relaciones, con la posibilidad de crear nuevos objetos y/o relaciones, estos objetos y relaciones deben ser coherentes con respecto a la teoría que hay en juego pero no con respecto a un modelo externo preestablecido. Este escenario puede ser ejemplificado con el juego Lego, cuando construimos con las piezas (objetos) de Lego, para poder ensamblar (relacionar) una pieza con una otra se deben cumplir ciertas condiciones (reglas de coherencia). Cuando ensamblamos un conjunto de piezas si estas no están construidas con ciertos principios (físicos por ejemplo), la construcción se caerá. Las intenciones didácticas pueden venir después, externamente al modelo implementado, por ejemplo Las piezas de Lego no definen nada en principio, pero uno podría pedir construir un cubo de ciertas dimensiones, con las piezas de Lego para crear una situación en donde el estudiante resuelva un problema con respecto al tema de calculo de áreas y volúmenes.

En la teoría de aprendizaje colaborativo la negociación es considerada como un medio para establecer la cooperación. La negociación implica la realización de proposiciones que pueden ser aceptadas o refutadas, se puede eventualmente trabajar con varias estrategias para buscar la

matemática relativa a un enunciado. El podrá evaluar un enunciado en función de la figura que ha sido construida en Cabri-Géomètre y eventualmente refutar el enunciado con un contra ejemplo.

4.1. Representación de los enunciados en Cabri-Euclide

El enunciado es el elemento de base de Cabri-Euclide, él expresa una propiedad de una prueba. En Cabri-Euclide el enunciado puede expresarse lingüísticamente, a través de un texto con Cabri-Euclide, o figuralmente, a través de un diseño con Cabri-Géomètre. Como lo muestra Duval (Duval 1991) el trabajar la prueba en diferentes registros ayuda a la toma de consciencia del rol de cada enunciado y su relación con los otros enunciados en la prueba, además es útil como elemento de organización en la actividad de resolución del problema, es por esto que nosotros definimos tres tipos de representación asociados a un enunciado : la figura, el grafo y el texto.



Estos tres contextos están correlacionados² en el sentido que cualquier acción sobre un contexto afecta los otros dos. La figura es construida en Cabri-Géomètre y es tiene prioridad sobre las otras representaciones, esto implica que cuando se construye un enunciado en el registro textual él debe ser coherente (el objeto debe existir, no debe provocar una contradicción) con respecto a el registro figural. El registro texto y el registro grafo son simétricos, es decir, todo lo representado en el texto esta representado el grafo, ya que el registro grafo es una imagen del texto.

4.2 El Estatuto de un Enunciado como elemento de negociación

El estatuto del enunciado es definido en función del valor “epistémico” de la proposición. El valor epistémico es el grado de certitud o de convicción que podemos asociar a una proposición (Duval [1991], pg. 255) . En un proceso de resolución de problemas podemos estar

²Por el momento los tres contextos pertenecen a tres aplicaciones diferentes (Cabri-Géomètre, Cabri-Grappe y Cabri-Euclide), ya existe una interconexión entre Cabri-Euclide y Cabri-Grappe pero falta la interconexión Cabri-Euclide y Cabri-Géomètre.

aceptación (Baker 1993). El isomorfismo con respecto a resolución de problemas y la construcción de la prueba, es el proceso de pruebas y refutaciones que representa la negociación para la aceptación de una conjetura con respecto a una teoría. En el caso de los micromundos son los objetos y las relaciones que representan esos principios teóricos y la opción de crear nuevos objetos o relaciones representan la capacidad de negociación y de aprendizaje colaborativo.

Partiendo de estos principios nosotros utilizamos la teoría de micromundo, creando un ambiente para la resolución de problemas en donde el sujeto aprende durante la construcción de la prueba y el micromundo aprende a través de las construcciones hechas por el sujeto. La aceptación de las construcciones representa la capacidad de negociación entre el sujeto y el micromundo. Así nosotros definimos Cabri-Euclide con el objetivo de la gestión de conocimientos para la resolución de problemas y la construcción de la prueba.

4. DESCRIPCIÓN DEL MICROMUNDO CABRI-EUCLIDE

Cabri-Géomètre (Laborde 1989, Bellemain 1992), es un micromundo en el cual el estudiante puede construir y manipular figuras geométricas para explorar sus propiedades y descubrir fenómenos de geometría. En la enseñanza clásica hay una gran distancia entre la figura y la demostración: la figura es trazada únicamente como complemento a la retórica de la demostración, en cambio la elaboración de una demostración apoyándose en Cabri-Géomètre explota completamente la figura como un lugar de experimentación, para descubrir elementos de prueba.

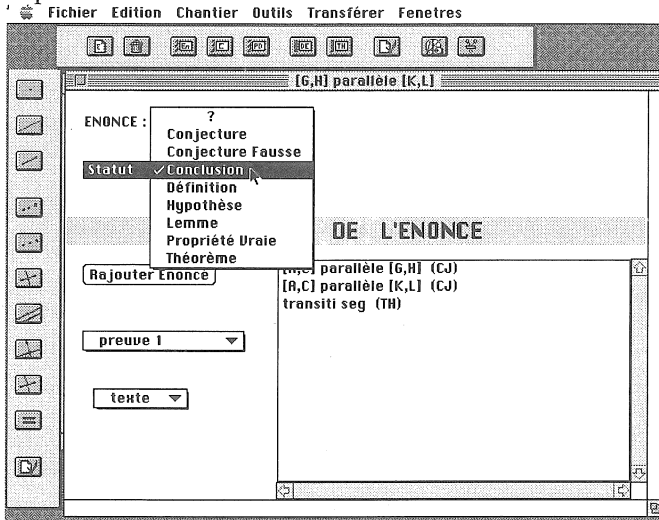
El micromundo de prueba, que nosotros llamamos Cabri-Euclide, establece un vínculo entre el análisis heurístico de la figura, realizado con Cabri-Géomètre, la formulación de conjeturas y la construcción de la prueba.

Dado un problema de geometría, el estudiante podrá construir la figura correspondiente con Cabri-Géomètre y producirá los enunciados que él desee con Cabri-Euclide¹. Cabri-Euclide analiza la estructura del conjunto de enunciados y diagnostica si hay o no la estructura de una prueba

¹ En estos momentos Cabri-Euclide es el resultado de 2 años y medios de trabajo, existe un prototipo que está escrito en C++.

interesados en probar un enunciado, para probarlo debemos pasar por diferentes etapas, estas etapas, o sub-problemas, pueden ser prealablemente conocidos (teoremas, hipótesis, etc.) o no (conjetura, lema), y eventualmente podemos estar interesados en probar los sub-problemas. Nosotros permitimos este proceso en Cabri-Euclide, ya que el sujeto exprime el estatuto del enunciado. Para nosotros éste es un elemento de negociación ya que a través del estatuto del enunciado Cabri-Euclide comprenderá como tratar el enunciado, y eventualmente él puede proponer el cambio del estatuto si él lo considera necesario y si la persona está de acuerdo. El micromundo gestionará el conocimiento en función de los estatutos de los enunciados.

En Cabri-Euclide se pueden manipular dos tipos de enunciados, los enunciados "operatorios" y no-operatorios.



Los Enunciados operatorios, los cuales permiten la deducción directa de un enunciado (Duval 1991), son los siguientes : Conclusión, Hipótesis, Teorema del curso, Propiedad Verdadera y Definición. La propiedad verdadera ha sido construida con respecto a un problema específico, podría ser eventualmente generalizada y convertirse en un teorema del curso en el caso que exista un proceso de institucionalización, lo que requiere la intervención del profesor.

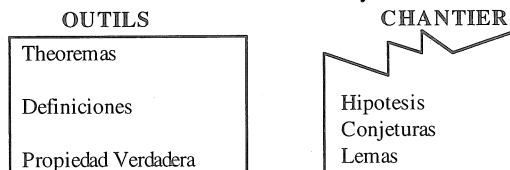
Los enunciados no-operatorios son considerados por Cabri-Euclide porque son válidos en el proceso de pruebas y refutaciones (Balacheff [91]), en el sentido que el sujeto busca validar un

enunciado, usando etapas intermedias que no han sido, todavía, demostradas como verdaderas. En esta búsqueda pueden haber reformulaciones o cambios con respecto a el grado de verdad que se le asocia a un enunciado. Estos enunciados no-operatorios son la Conjetura, el Lema y la Conjetura falsa. La conjetura falsa es un enunciado que falla con respecto a una teoría, eventualmente esa falla se puede mostrar con un contra-ejemplo.

4.3 Construcción y Manipulación de los enunciados

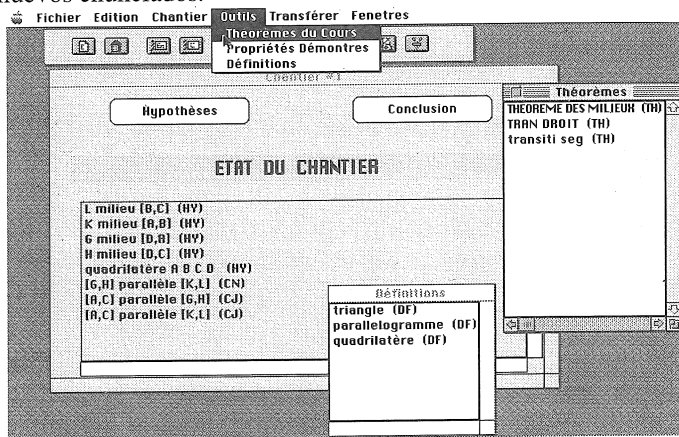
Es en la construcción y manipulación de los enunciados que se produce el proceso de negociación y la posibilidad del aprendizaje colaborativo. Para esto es importante que la creación y manipulación de los objetos sea lo mas cercano a la realidad matemática que ella implica.

En la manipulación directa el ratón de la computadora es la "prolongación de la mano" que interviene para manipular físicamente objetos en la pantalla. Ella debe permitir al estudiante quedarse próximo de la acción en sus actividades con el ambiente informático operando sobre objetos formales. Para un estudiante, la necesidad de declarar sus acciones, los medios que el tiene para hacerlo y la interpretación que hace el útil informático constituyen los obstáculos y las propiedades del medio, propias de las características del modelo matemático. Es por adaptación a esos obstáculos y a la explicación de sus propiedades que él debe construir su conocimiento (Bellemain 1992, pg. 102). La interface de un micromundo debe ser lo mas transparente posible, en el sentido que los obstáculos producidos por el medio, en nuestro caso Cabri-Euclide, puedan ser interpretados y eventualmente negociados. Cabri-Euclide ofrece 2 tipos de contexto, con "capacidad de negociación" diferente: el contexto "chantier" y el contexto "outils".



El contexto "chantier", que en español quiere decir obra de construcción, permita la resolución del problema, el soporta soluciones parciales y la utilización de lemas y conjeturas. El contexto

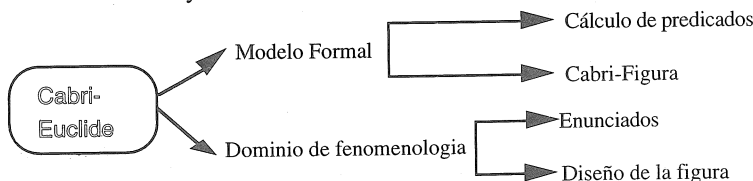
"outils", útiles, contiene los enunciados que ya están probados y que van a servir de útiles para la construcción de nuevos enunciados.



Debemos resaltar el aspecto *macro-construcción* del micromundo: es posible construir enunciados, y según el tipo de construcción (propiedad verdadera o definición), ellos podrán ser nuevos útiles del micromundo, es decir ellos podrán ser reinvertidos para la construcción de otro enunciado o para resolver otro problema. Por ejemplo si el micromundo conoce el concepto de paralelas y de cuadrilátero, en Cabri-Euclide podríamos definir el nuevo concepto paralelogramo. El protocolo de macro-construcción es definido por un proceso de negociación ya que, para que Cabri-Euclide acepte esa macro-construcción, el sujeto y la aplicación deben estar de acuerdo en cuanto a la coherencia y el dominio en el que es valido ese nuevo concepto.

4.4 Arquitectura del micromundo

Distinguimos dos niveles de descripción en Cabri-Euclide (Balacheff 1994 p.33), que corresponden a las dos constituyentes esenciales de su arquitectura :



1) *El modelo formal* describe la referencia teórica del micromundo. Para describirlo utilizamos el lenguaje formal LDL (Logical Description Language) (Desmoulin 1994 p. 53) y la figura "Cabri

Géomètre". LDL es un lenguaje de calculo de predicados que permite deducciones lógicas sobre las figuras geométricas, LDL permite manipular las expresiones y expresar las inferencias. La figura "Cabri-Géomètre" es el enunciado de una figura que ha sido construida con "Cabri-Géomètre"

Por ejemplo, el objeto paralelogramo será representado por el siguiente predicado :

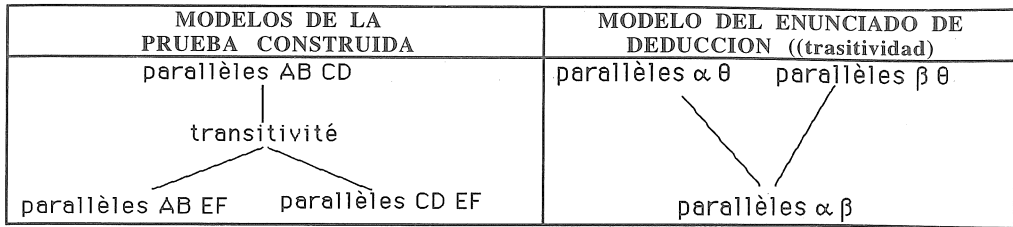
Paralelogramo (ABCD) =
 Paralelo(Segmento(Punto(A),Punto(B)), Segmento(Punto(C),Punto(D)))
 Paralelo(Segmento(Punto(A),Punto(D)), Segmento(Punto(B),Punto(C)))

2) *El dominio de fenomenología* est el lugar donde se materializan las retroacciones que el micromundo produce como consecuencia de las decisiones y acciones del usuario. Las retroacciones son calculadas en el sistema formal, que expresen configuraciones particulares de objetos o de relaciones, y son traducidos por "hechos" en la interface : un desplazamiento de puntos para producir un contra-ejemplo, un análisis sobre la coherencia de una prueba (incompleta, falsa, correcta) que se exprime en un mensaje. Estos hechos representan fenómenos cognitivos que permiten la comprensión, la explicación.

5. VERIFICACIÓN DE LA COHERENCIA DE UN ENUNCIADO

El agente racional del micromundo es lo que nosotros llamamos "verificación de la coherencia". Este módulo representa el útil de negociación entre la computadora y el sujeto. Cuando construimos una prueba y queremos que ella sea aceptada pediremos la "verificación de la coherencia" y a ese momento el agente racional nos dirá porque el esta deacuerdo o no con esa prueba. Esta verificación consiste en examinar la validez de un enunciado con respecto a su dominio. El dominio es definido en función de los otros enunciados que han sido utilizados en ese problema (contexto "chantier"), los útiles de deducción que intervienen (contexto "outils": teoremas, definiciones) y la figura que ha sido construida. La verificación es hecha en el modelo formal y se exprime en el dominio de fenomenología.

La verificación de la coherencia con respecto a un enunciado hace la comparación entre el modelo de prueba que ha sido construido por el sujeto y el enunciado que es utilizado como útil de deducción en esa prueba (un teorema o una definición). Ambos son representados por un árbol.



Cuando se hace comparación de estos arboles se deben resolver dos tipos de problemas: la *unificación* de variables y la *equivalencia* de los dos arboles. La unificación de variables representa la problemática de que una representación es una instancia a una figura (la prueba construida) y la otra representación es generalizada (el enunciado de deducción). En nuestro ejemplo, debemos reconocer que α es AB, θ es CD, etc. La segunda problemática es dada a la equivalencia en las de propiedades geométricas, es decir $[AB] = [BA]$. En Cabri-Euclide estos dos problemas son resueltos a la misma vez. Primero se verifica si los dos arboles son isomorfos y si es el caso, se establece un orden geométrico con respecto a los objetos (hojas del árbol) y se trata de unificar verificando que las variables generales sean unificadas uno-a-uno con los objetos instanciados.

6. CONCLUSIÓN

El proceso de pruebas y refutaciones representa para nosotros el escenario de construcción de una prueba, con características fundamentales como la resolución de problemas y el carácter social de la prueba. Buscando el isomorfismo en la interacción computadora-sujeto, pero con componentes propias a la computadora como es la posibilidad de trabajar uno-a-uno, y de proveer elementos de organización para la resolución de problemas, en Cabri-Euclide modelamos este proceso a través del estudiante que construye una prueba, valida su construcción en interacción con el agente racional que realiza la verificación de la coherencia, con elementos de negociación como el estatuto de un enunciado y la macro-construcción.

El carácter social de la prueba nos abre las puertas a un punto de vista interesante que es la computadora como un elemento social en esta interacción. La teoría de aprendizaje colaborativo nos permite modelar el tipo de participación por parte de la computadora. Agrandar los componentes de

esta comunidad parece enriquecer el proceso y es en este sentido que nosotros buscamos trabajar en una nueva dimensión que es la telepresencia, es decir la intervención a distancia del profesor. En este caso la computadora tiene eventualmente un nuevo rol que es el de proveer al profesor toda la información concerniente al trabajo del estudiante y al problema que se debe resolver, para que el profesor pueda hacer un diagnóstico y así participar también en la resolución del problema.

BIBLIOGRAFIA

- Anderson J.R., Boyle C.F., Corbett A., Lewis M. (1990) Cognitive modeling and intelligent tutoring. *Artificial Intelligence* 42, 7-49.
- Almouloud S., Giorgiutti I. (1993) EIAO et didactique: le cas de DEFI, outil didactique et aide à la recherche. In : Baron M., Gras R., Nicaud J.-F. (eds) *Actes des Troisièmes Journées EIAO Cachan* (pp.15-25). Paris : Eyrolles.
- Arsac G. (1990) Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France. *Recherches en didactiques des mathématiques* 9 (3) pp. 247-280.
- Balacheff N. (1987). Processus de preuve et situation de validation. *Educational Studies in Mathematics* 18, pp. 147-176.
- Balacheff N. (1991). Treatment of Refutations : Aspects of the Complexity of a Constructivist Approach to Mathematics Learning. In : Glasersfeld E. von (ed.) *Radical Constructivism in Mathematics Education*. (pp. 89-110) Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
- Balacheff N. (1994). Didactique et Intelligence Artificielle. *Recherches en didactique des mathématiques*, Volume 14/1.2. La Pensée Sauvage.
- Bazin J.M., (1993). Un modèle d'expert en résolution de problème de géométrie, Journées EIAO Cachan 1993.
- Baker M. (1993). Dialogic Learning : Negotiation and Argumentation as Mediating Mechanisms. *Proceedings of IA-ED '93 : World Conference on Artificial Intelligence in Education*, August 1993, Edinburgh (GB).
- Baker M. & Bielaczyc K. (1995). Missed opportunities for learning in collaborative problem-solving interactions. *Proceedings of IA-ED '95 : World Conference on Artificial Intelligence in Education*, August 1995, Washinton (USA).
- Bellemain F. (1992). Conception, réalisation et expérimentation d'un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie: Cabri-géomètre, thèse LSD2-IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble I.
- Brousseau G. (1986) *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse d'état. Université de Bordeaux I.
- Chazan D. (1993) High School geometry Student's Justification for their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational studies in Mathematics* 24(4) 359-387.
- Duval R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in mathematics* 22, pp. 233-261.
- Dillembourg p. & Self J. (1990). Designing Human-Computer Collaborative Learning. *Computer Supported collaborative Learning*, NATO, serie F.
- Desmoulins C. (1994). Etude et réalisation d'un système tuteur pour la construction de figures géométriques, thèse LGI-IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble I.
- Ferneda E. (1992) *Conception d'un agent rationnel et examen de son raisonnement en géométrie*. Thèse. Université de Montpellier II.
- Hanna G., Jahnke (1993) Proof and Application. *Educational studies in Mathematics* 24(4) 421-438.
- Laborde J. & Triling L. (1989) Conception et réalisation d'un système intelligent d'apprentissage de la géométrie, Présentation de projet LSD-IMAG, Grenoble.
- Lakatos, I. (1976). *Proof and Refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Legrand M. (1990) Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques* 9 (3) 365-406.
- Py D., Nicolas P. (1990) MENTONIEZH: A geometry ITS for figure drawing and proof setting. *Artificial Intelligence in Education*. 1(3) 41-55.